Rappel sur quelques lois de probabilité

Marie-Pierre Etienne

November 2018

Lois continues

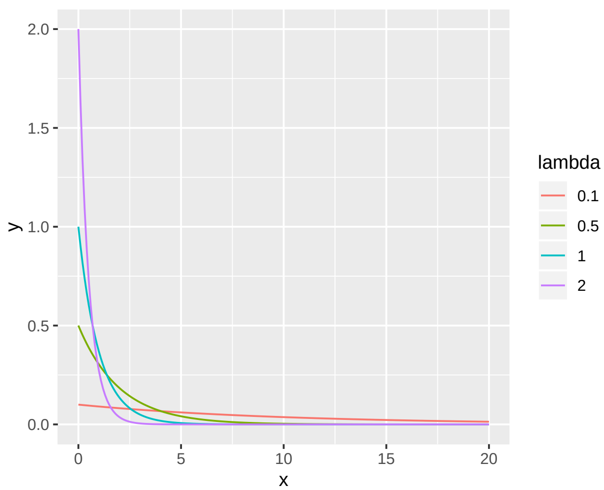
Loi exponentielle

La loi exponentielle a pour support $[0, +\infty[$. X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle a pour densité

$$[X = t] = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda exp(-\lambda\, t) & t \geq 0, \\ 0 \quad sinon \end{array} \right.$$

L'espérance et la variance sont données par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$



Loi Gamma et Inverse Gamma

Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables i.i.d de loi exponentielle de paramètre λ alors $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi Gamma de paramètres de forme n et de paramètre d'échelle λ. On peut généraliser la définition à un n non entier. Le support d'une loi Gamma est $[0, +\infty[$ et si X suit une loi $\Gamma(a, b)$, sa densité est donnée par~:

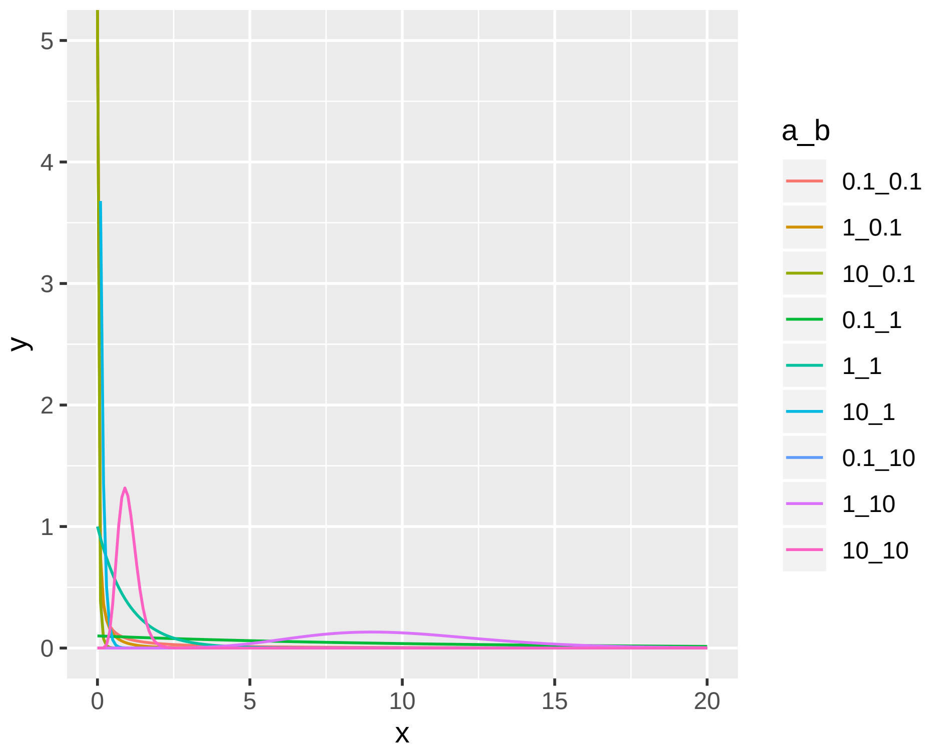
$$[X = t] = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{b^a t^{a-1} e^{-b\, t}}{\Gamma(a)} & t \geq 0, \\ 0 \quad sinon \end{array} \right.$$

L'espérance et la variance sont données par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a}{b^2}.$$

Quelques exemples de lois Gamma pour différentes valeurs de a et b~:

```
## Warning: Removed 1 rows containing missing values (geom_path).
```



On dit que X suit une loi Inverse-Gamma si X^{-1} suit une loi Gamma. Par ces propriétés mathématiques, la loi Inverse Gamma est naturellement candidate comme prior pour le paramètre de variance dans un modèle normal. En effet si $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ connu et $\sigma^2 \sim \Gamma(a, b)$, alors $\sigma^2 | Y, \mu \sim \Gamma(a', b')$.

Loi Beta

La loi Beta a pour support $[0,]$. Si X suit une loi beta de paramètre (a, b) alors la densité de X est donnée par

$$[X = t] = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b) t^{a-1} (1-t)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & t \in [0, 1], \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

L'espérance et la variance sont données par

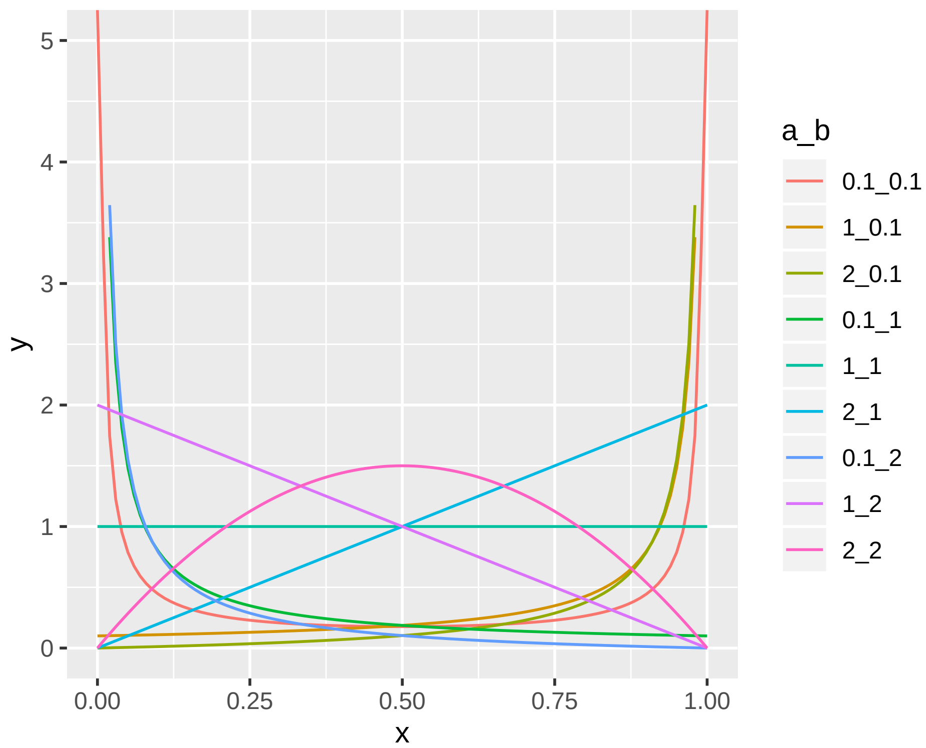
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a\,b}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Lois discrètes

Loi binnomiale

Y suit une loi de Bernoulli si le support de Y est $\{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p$.
Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Le support de X est $\{0, 1, \ldots n\}$ est la loi de probabilité de X est donnée par

$$[X = k] = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^k \, (1-p)^{n-k} \qquad k \in \{0, 1, \ldots n\}$$



L'espérance et la variance sont données par

$$\mathbb{E}(X) = n\,p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = n\,(1-p)$$

Loi de Poisson

Le support d'une loi de Poisson est $\mathbb{N}$. X suit une loi de Poisson de paramètre λ si

$$[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\left(-\lambda\, k\right) \quad k \in \mathbb{N}$$

L'espérance et la variance sont données par

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda$$

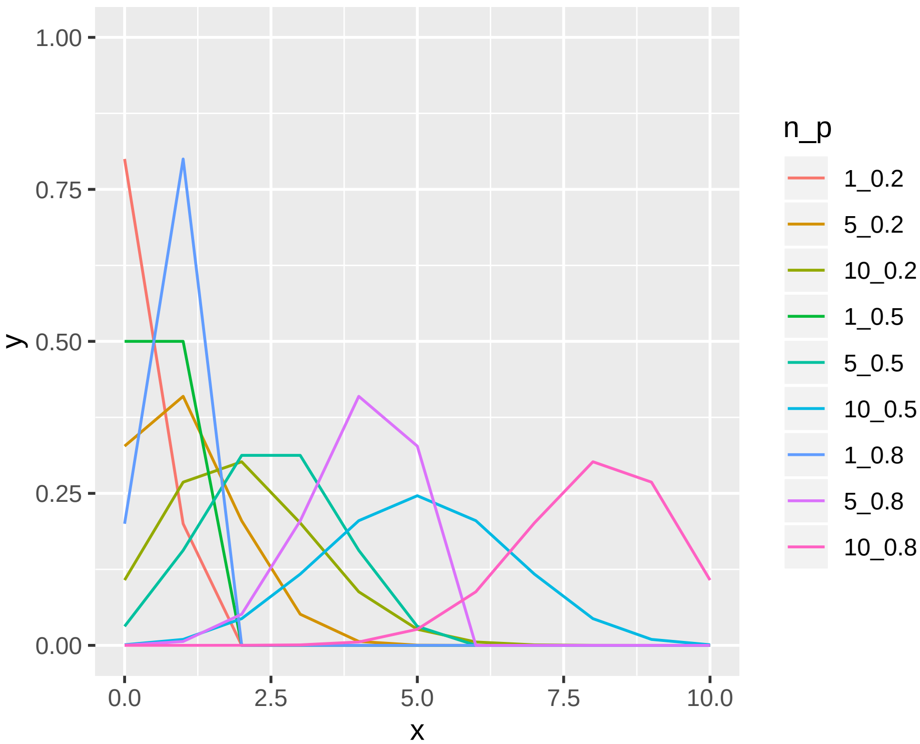


Figure 1: Distribution binomiale pour différentes valeurs de n et p

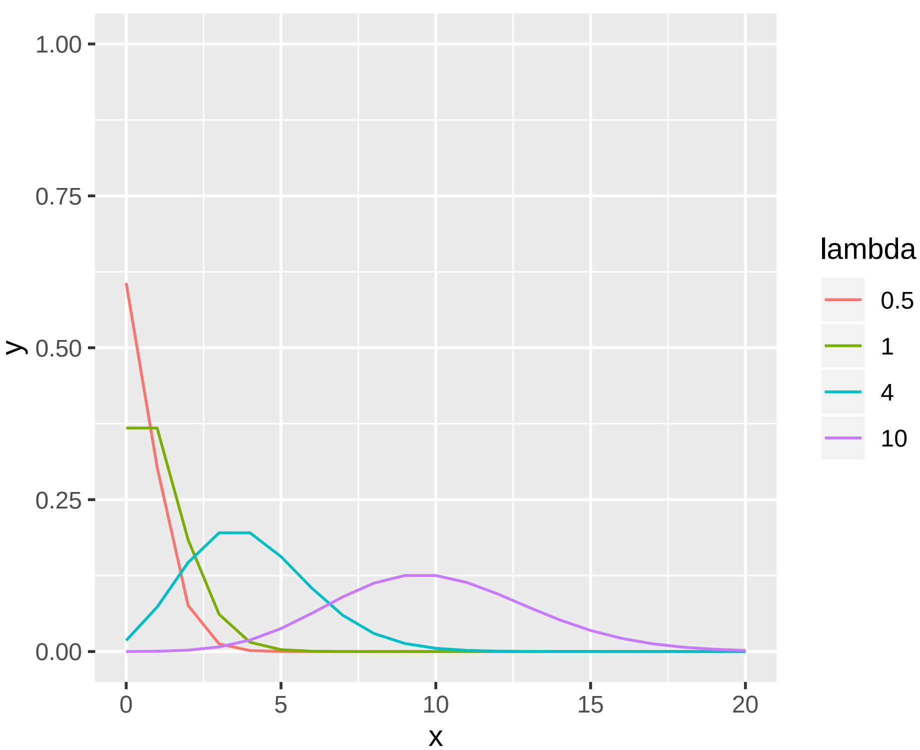


Figure 2: Distribution de Poisson pour différentes valeurs de λ